1) a) $\frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{1}{a+b}-(\frac{b+a}{ab})=\frac{ab-(a+b)^2}{ab(a+b)}=\frac{ab-a^2-2ab-b^2}{ab(a+b)}$

Soit $\frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{-(a^2+ab+b^2)}{ab(a+b)}$

Or $a^2 > 0$ car $a > 0$ et $b^2 > 0$ car $b > 0$ et $ab > 0$ donc $-(a^2+ab+b^2) < 0$
Comme $a > 0$ et $b > 0$ alors $ab > 0$ et $(a + b) > 0$.
On a donc $\frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})<0$

b) $(\sqrt{a+b})^2=a+b$ et $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$
donc $(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ et $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$ car les nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

2) si $a = b = 2$

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

comme $\frac{1}{4}<1$ donc $\frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})<0$

$(\sqrt{2+2}) = \sqrt{4} = 2$
$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

comme $2 < 2\sqrt{2}$ alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$